T O P O L O G I A

WPPT I, sem. letni
LISTA 4

Wrocław, 21 marca 2010

ZADANIE 1. Udowodnij, że każda izometria jest homeomorfizmem.

ZADANIE 2. Udowodnij, że każdy ciąg podstawowy jest ograniczony.

ZADANIE 3. Uzasadnij wszystkie "własności własności" z tabelki podanej w konspekcie wykładu 4.

ZADANIE 4. W przestrzeni $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ zadajemy metrykę $d(x, y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$ (czy to jest metryka?) Czy ciąg $a_n = (-n)^n$ jest podstawowy w tej metryce? Czy jest on zbieżny?

ZADANIE 5. Wykaż, że ciąg (x_n) w przestrzeni metrycznej (X, d) jest podstawowy wtedy i tylko wtedy gdy istnieje przestrzeń metryczna (X', d') taka, że $X \subset X'$, $d' = d$ na X (czyli nadprzestrzeń) i (x_n) jest zbieżny w X'.
Wsk. Dołóż do X jeden punkt.

ZADANIE 6. Udowodnij, że $[0, 1]$ jest przestrzenią zupełną z każdą metryką równoważną metryce "moduł różnicy".
Wsk. Wykorzystaj wiedzę z analizy o funkcjach ciągłych na $[0, 1]$.

ZADANIE 7. Rozważmy zbiór $CB(X, Y)$ funkcji z przestrzeni metrycznej (X, d) w (Y, e) ciągłych i ograniczonych (czyli obraz każdej z nich jest zawarty w pewnej kuli). Zbiór ten z metryką supremum

$$d_{sup}(f, g) = \sup_{x \in X} e(f(x), g(x))$$

jest przestrzenią metryczną zupełną wtedy i tylko wtedy gdy ??? jest przestrzenią zupełną.
Wstaw w miejsce ??? właściwą treść: „(X, d)" albo „(Y, e)" albo „każda z przestrzeni (X, d), (Y, e)".

Tomasz Downarowicz